Scritto del 01 febbraio 2018
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2017/18
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes ed $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente, $p_t = p(t, S_t)$ il prezzo di una put di maturitá T, prezzo d'esercizio K, con sottostante $\{S_t\}_{t\geq 0}$.

(i) Tramite la formula di Ito determinare l'equazione differenziale stocastica di cui $\{p_t\}_{t\in[0,T]}$ é soluzione. Piú precisamente determinare μ_t^p e σ_t^p tale che:

$$dp_t = p_t(\mu_t^p dt + \sigma_t^p dW_t).$$

(ii) Tenendo conto che $p(t, x)$ é soluzione dell'equazione di valutazione di Black & Scholes mostrare che

$$\frac{\mu_t^p - r}{\sigma_t^p} = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

2. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \quad S_0 > 0$$

con μ_t e σ_t processi dati, ed con $r > 0$ tasso d'interesse.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente per $\{S_t\}_{t\geq 0}$.
(i) Sia $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, scrivere l'equazione differenziale stocastica di cui *é* soluzione.
(ii) Sia $h_t = (\alpha_t, \beta_t)$ una strategia autofinanziante, sia $V_t^h = \alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ il valore del portafoglio e $\widetilde{V}_t^h = e^{-rt} V_t^h$. Mostrare che

$$d\widetilde{V}_t^h = \alpha_t d\widetilde{S}_t.$$

(iv) Dare la definizione di arbitraggio.
(v) (Esercizio facoltativo) Tenendo conto del punto (ii) mostrare che l'esistenza di una misura martingala equivalente implica l'assenza di opportunitá di arbitraggio.

3.
Siano $\{S_t^1\}_{t\geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t\geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(r dt + \sigma_1 dW_t^1), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(r dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ costanti e $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.
(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E[\sqrt{S_T^1 S_T^2} | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$$

(**Suggerimento:** scrivere $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t$ con $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W_t^1\}_{t\geq 0}$).
(ii) Un investitore ha venduto 1000 derivati europei di payoff finale $F(S_t^1 S_T^2) = \sqrt{S_T^1 S_T^2}$, determinare il delta del portafoglio di copertura investendo nelle azioni S^1 ed S^2. Quante azioni S^1 ed S^2 deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio, se $S_0^1 = 50\$$, $S_0^2 = 30\$$, $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 18\%$, $T = 12$ mesi, $\rho = 0.5$?.