Scritto del 18 gennaio 2018
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2017/18
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.
(i) Determinare la soluzione esplicita della seguente equazione differenziale stocastica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ e $\sigma > 0$ costanti, e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. (**Suggerimento:** applicare la formula di Ito per determinare la dinamica di $\log(S_t)$)
(ii) Mostrare che $S_t e^{-\mu t}$ é una martingala.

2.
Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW^1_t) \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW^1_t + \sigma_{22} dW^2_t + \sigma_{23} dW^3_t), \quad S^2_0 > 0.$$

$$dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_{34} dW^4_t) \quad S^3_0 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2, 3$ e $\sigma_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3, 4$ costanti, $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, moti browniani indipendenti.
Considerare un mercato finanziario costituito da i tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) E' possibile aggiungere un quarto titolo negoziato sul mercato in modo da rendere completo il mercato?

2. Siano $\{S^1_t\}_{t\geq 0}$ e $\{S^2_t\}_{t\geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(r dt + \sigma_1 dW^1_t), \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(r dt + \sigma_2 dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ costanti e $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.
(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E[(S^1_T S^2_T)^2 | S^1_t = x_1, S^2_t = x_2]$$

(**Suggerimento:** scrivere $W^2_t = \rho W^1_t + \sqrt{1-\rho^2} B_t$ con $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W^1_t\}_{t\geq 0}$).

(ii) (Esercizio facoltativo) Applicare la formula di Ito per determinare l'equazione differenziale stocastica (EDS) seguita dal processo $\{Y_t\}_{t\geq 0} = \{(S^1_t S^2_t)^2\}_{t\geq 0}$.