Scritto del 31 gennaio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano.
(i) Dimostrare che $M_t := e^{-1/2c^2t+cW_t}$, con c costante, é una martingala.
(ii) Applicare la formula di Ito per determinare l'EDS di cui M_t é soluzione.

Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes, soluzione della EDS

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(iii) Determinare la dinamica del prezzo scontato $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$.
(iv) Individuare l'unica misura martingala Q, scrivere la dinamica di $\tilde{S}_t$ e di S_t rispetto a Q e dedurre dal punto (ii) l'espressione esplicita di $\tilde{S}_t$ e di S_t rispetto alla misura Q.
(v) Determinare il prezzo di un derivato $v(t,x)$ (al tempo t se $S_t = x$) di payoff finale $F(S_T) = (\frac{S_T}{S_0})^3$.
(vi) Applicare la formula di Ito per determinare la dinamica del processo $Y_t = (\frac{S_t}{S_0})^3$ rispetto alla misura Q.

2. Siano $\{S_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{34} dW_t^4) \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_i, $\sigma_{ij} > 0, i, j = 1,2,3,4$, costanti, $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $i = 1,2,3,4$, moti browniani indipendenti. Considerare un mercato finanziario costituito dai tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente;
(ii) Determinare le misure martingale equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? É completo o incompleto?
(iii) E' possibile aggiungere un quarto titolo da rendere completo il mercato?
(iv) Applicare la formula di Ito (multidimensionale) per mostrare che il processo

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2})t + \sigma_{11} W_t^1 + \sigma_{12} W_t^2}$$

risolve la prima equazione del sistema.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p(0,T)$ di un DZCB (senza recovery) di valore nominale x e maturitá T.
b) Calcolare $Q(\tau < T | \tau > t)$ con $t \in (0,T)$.
c) Determinare il prezzo $p(t,T)$ al tempo $t \in [0,T]$.
d) Sia $T = 2$ anni, $x = 100$ e $r = 2\%$. Se il prezzo al tempo $t = 6$ mesi é $p(t,T) = 95\$$, determinare l'intensitá di default $\lambda > 0$ dell'istituto finanziario.

Scritto del 31/01/2019 Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

1) W_t moto browniano $\qquad M_t = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t} \qquad c \in \mathbb{R}$

$\forall t > s$

$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$

$\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cW_t} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}c^2 s + cW_s}$ è equivalente a mostrare che

$\mathbb{E}[e^{c(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{\frac{1}{2}c^2(t-s)}$ in quanto W_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile.

Poiché $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ e $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$\mathbb{E}[e^{c(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{c(W_t - W_s)}] = \mathbb{E}[e^{c\sqrt{t-s}\,N}] = e^{c^2(t-s)/2}$ che era quello che volevamo dimostrare

(iii) Q è una misura mg per S se $Q \sim P$ (cioè $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$)

ed $\{e^{-rt} S_t\}$ è una Q-mg

Dinamica di $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t \qquad d\tilde{S}_t = -r e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} \underbrace{dS_t}_{S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)}$

$\Rightarrow d\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}\{(\mu - r)\, dt + \sigma\, dW_t\} \qquad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\{(\mu - r)\, dt + \sigma\, dW_t\}$

(iii) L'unica misura mg è individuata dal teorema di Girsanov in modo tale

che $\quad W_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$

Rispetto a Q: $\quad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma\, dW_t^Q \quad$ e $\quad dS_t = S_t(r\, dt + \sigma W_t^Q)$

(ii) Itô : $$df(t,\omega_t) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\omega_t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega_t) \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\omega_t)\, d\omega_t$$

$$f(t,x) = e^{-\frac{1}{2}c^2 t + cx} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}c^2 \cdot f \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = c f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x} = c \frac{\partial f}{\partial x} = c^2 f$$

$$\Rightarrow dM_t = \left\{ \frac{1}{2} c^2 M_t - \frac{1}{2} c^2 M_t \right\} dt + c M_t\, d\omega_t$$

$$\Rightarrow \quad dM_t = c M_t\, d\omega_t$$

(iv) continuazione : $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma\, d\omega_t^{\mathbb{Q}}$ $\qquad \tilde{S}_t = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \omega_t^{\mathbb{Q}}}$

$$S_t = e^{rt} \tilde{S}_t = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\omega_t^{\mathbb{Q}}}$$

(v) $$v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T^3}{S_0^3} \,\middle|\, S_t = x \right] \qquad S_T = S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(\omega_T^{\mathbb{Q}} - \omega_t^{\mathbb{Q}})}$$

$$= \frac{1}{S_0^3} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_t^3 e^{3(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + 3\sigma(\omega_T^{\mathbb{Q}} - \omega_t^{\mathbb{Q}})} \,\middle|\, S_t = x \right]$$

$$= \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{-r(T-t)} e^{3(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma\sqrt{T-t}\,N} \right]}_{= e^{\frac{9\sigma^2(T-t)}{2}}}$$

$$\boxed{v(t,x) = \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{2r(T-t)} e^{3\sigma^2(T-t)}}$$

$f(t,x) = (x/S_0)^3 e^{-rt}$

(vi) $Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 e^{-rt}$ $\quad \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \left(\frac{x}{S_0}\right)^3 e^{-rt}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 3\frac{x^2}{S_0^3} e^{-rt}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 6\frac{x}{S_0^3} e^{-rt}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t} = -r f$

$$df(t,S_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,S_t) \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\, dS_t$$

(vi) $\quad Y_t = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 = f(S_t) \quad$ ove $\quad f(x) = \frac{x^3}{S_0^3}$

$$f'(x) = \frac{3}{S_0^3} x^2 \qquad f''(x) = \frac{6x}{S_0^3}$$

rispetto alla misura Q
$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\, dW_t^Q)$

$$df(S_t) = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''(S_t)\,dt + f'(S_t)\,dS_t$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \cdot 6\frac{S_t}{S_0^3}\,dt + \frac{3}{S_0^3} S_t^2\, S_t\,(r\,dt + \sigma\, dW_t^Q)$$

$$= 3\sigma^2 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dt + 3r\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dt + 3\sigma\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^3 dW_t$$

$$\Rightarrow \quad dY_t = Y_t\{(3r + 3\sigma^2)\,dt + 3\sigma\, dW_t^Q\}$$

Questo risultato è coerente con il punto (v), infatti essendo Y_t un moto browniano geometrico con rendimento atteso $\bar{\mu} = 3r + 3\sigma^2$ rispetto alla misura Q segue che

$$E^Q[Y_T \mid \mathcal{F}_t] = Y_t\, e^{(3r+3\sigma^2)(T-t)}.$$

2)
$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 & \sigma_{34} \end{pmatrix}$$

Le misure martingale si trovano determinando le soluzioni del sistema $\underline{\sigma} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$

$N = 3$ titoli rischiosi
$d = 4$ moti browniani

Osserviamo che $rg\,\underline{\sigma} = 3$ in quanto $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_{31} \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{23} \neq 0$

$\Rightarrow$ per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ - soluzioni

$\forall$ soluzione $\underline{\theta}$ vettore dei prezzi di mercato del rischio corrisponde una misura mg $\mathbb{Q}^\theta$:

$W_t^{1\mathbb{Q}} = W_t^1 + \theta_1 t \qquad W_t^{2\mathbb{Q}} = W_t^2 + \theta_2 t \qquad W_t^{3\mathbb{Q}} = W_t^3 + \theta_3 t \qquad W_t^{4\mathbb{Q}} = W_t^4 + \theta_4 t$

sono moti browniani

(ii) È possibile completare il mercato aggiungendo un quarto titolo:

$$dS_t^4 = S_t^4 (\mu_4 dt + \sigma_{41} dW_t^1)$$

scelgo rispetto alla quarta riga

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Det}\,\underline{\sigma} = -\sigma_{41} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{34} \end{vmatrix} = -\sigma_{41} \cdot \sigma_{34} \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_{23} \neq 0$$

Per il teorema di Cramer esiste una unica misura mg $\mathbb{Q}$ t.c.

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 (r + \sigma_{11} dW_t^{1\mathbb{Q}} + \sigma_{12} dW_t^{2\mathbb{Q}}) \\ dS_t^2 = S_t^2 (r + \sigma_{22} dW_t^{2\mathbb{Q}} + \sigma_{23} dW_t^{3\mathbb{Q}}) \\ dS_t^3 = S_t^3 (r + \sigma_{31} dW_t^{1\mathbb{Q}} + \sigma_{34} dW_t^{4\mathbb{Q}}) \\ dS_t^4 = S_t^4 (r + \sigma_{41} dW_t^{4\mathbb{Q}}) \end{cases}$$

OSS:

(i) $\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{34}\theta_4 = \mu_3 - r \end{cases}$ Le infinite soluzioni sono $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2 \\ \theta_3 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{23}} - \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}\theta_2 \\ \theta_4 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{34}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{34}}\left(\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}} - \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\theta_2\right) \end{cases}$ $\theta_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\begin{cases} \sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{12}\theta_2 = \mu_1 - r \\ \sigma_{22}\theta_2 + \sigma_{23}\theta_3 = \mu_2 - r \\ \sigma_{31}\theta_1 + \sigma_{34}\theta_4 = \mu_3 - r \\ \sigma_{41}\theta_1 \qquad\qquad = \mu_1 - r \end{cases}$ L'unica soluzione è $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \\ \theta_2 = \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} - \dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \\ \theta_3 = \dfrac{\mu_2 - r}{\sigma_{23}} - \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}\left(\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} - \dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}}\right) \\ \theta_4 = \dfrac{\mu_3 - r}{\sigma_{34}} - \dfrac{\sigma_{31}}{\sigma_{34}}\dfrac{\mu_1 - r}{\sigma_{41}} \end{cases}$

(iv) $S_t^1 = S_0^1 e^{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right)t + \sigma_{11}W_t^1 + \sigma_{12}W_t^2}$

$S_t^1 = f(t, W_t^1, W_t^2)$ ove $f(t, x_1, x_2) = S_0^1 e^{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_{11}^2}{2} - \frac{\sigma_{12}^2}{2}\right)t + \sigma_{11}x_1 + \sigma_{12}x_2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = \left(\mu_1 - \dfrac{\sigma_{11}^2}{2} - \dfrac{\sigma_{12}^2}{2}\right) f \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \sigma_{11} f \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \sigma_{12} f \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \sigma_{11}^2 f \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \sigma_{12}^2 f$

$df = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\}dt + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dW_t^1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}dW_t^2$ (essendo $S_t^1 = f(t, W_t^1, W_t^2)$)

$dS_t^1 = \left\{\left(\mu_1 - \dfrac{\sigma_{11}^2}{2} - \dfrac{\sigma_{12}^2}{2}\right)S_t^1 + \dfrac{1}{2}\sigma_{11}^2 S_t^1 + \dfrac{1}{2}\sigma_{12}^2 S_t^1\right\}dt + \sigma_{11}S_t^1\, dW_t^1 + \sigma_{12}S_t^1\, dW_t^2$

$\Rightarrow dS_t^1 = S_t^1\left\{\mu_1\, dt + \sigma_{11}\, dW_t^1 + \sigma_{12}\, dW_t^2\right\}$

3) $P(\tau > t) = e \quad \forall\, t > 0$

a) secondo la valutazione neutrale al rischio

$$p(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[\, x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = e^{-rT} x\, Q(\tau > T) = e^{-rT} x\, e^{-\lambda T} = x\, e^{-(\lambda + r)T}$$

b) $$Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{Q(\,(\tau < T) \cap (\tau > t)\,)}{Q(\tau > t)} = \frac{Q(\, t < \tau < T)}{Q(\tau > t)}$$

$\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad F(t) = Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

e $\quad Q(t < \tau < T) = F(T) - F(t) = (1 - e^{-\lambda T}) - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}$

$$\Rightarrow Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}$$

c) se $\tau > t$ (ossia non c'è stato il default in $(0,t]$) $\qquad$ se $\tau \le t$ $\quad p(t,T) = 0$

~~p(t,T)=~~

$$p(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}[\, x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \tau > t\,] =$$

$$= x\, e^{-r(T-t)}\, Q(\tau > T \mid \tau > t)$$

Dal punto b) ricaviamo che: $\quad Q(\tau > T \mid \tau > t) = 1 - Q(\tau < T \mid \tau > t) = e^{-\lambda(T-t)}$

$$\Rightarrow p(t,T) = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}\, \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

d) $\quad 95 = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad \frac{95}{x} = e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad \bullet\ (r+\lambda) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right)$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\lambda = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right) - r = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{100}{95}\right) - 0.02 = 0.0\ldots$$

$= 0.014$