Scritto del 31/01/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del ischio I, a.a. 2018/19

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (8 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p(0, T)$ di un DZCB (senza recovery) di valore nominale x e maturitá T.

b) Calcolare $Q(\tau < T | \tau > t)$ con $t \in (0, T)$.

c) Applicare in punto b) per determinare il prezzo $p(t, T)$ all'istante $t \in (0, T]$.

d) Sia $T = 2$ anni, $x = 100$ e $r = 2\%$. Se il prezzo al tempo $t = 6$ mesi é pari a 95$ determinare l'intensitá di default $\lambda > 0$ dell'istituto finanziario.

2. (12 punti)

Il prezzo di un'azione é di 22$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi bimestri il prezzo salga dell' 1,8% o scenda del 2%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é dell' 3%.

a) Qual'é il valore di una call europea con prezzo d'esercizio 22$ e scadenza 6 mesi?

b) Qual'é il valore della corrispondente put europea?

c) Un investitore ha venduto 1000 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di ribasso sia alla fine del primo bimestre che del secondo? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) dell' 8% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5% annuo. Sia S_t il prezzo descritto nel modello Black & Scholes e $S_0 = 50\$$.

a) Sia η il rendimento annuo composto continuamente dell'investimento in azioni in due anni ($S_T = S_0 e^{\eta T}$, ove S_T é il prezzo dell'azione al tempo T). Determinare la probabilitá che η abbia valori in $(3\%, 4\%)$.

b) Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 2$ anni, che pagherá alla scadenza $f(S_T) = f_1(S_T) + f_2(S_T)$ ove $f_1(S_T) = 10 I_{\{\eta < 0,035\}}$ e $f_2(S_T) = (S_T)^{-1}$. Utilizzare la valutazione neutrale verso il rischio per calcolare il prezzo del derivato oggi.

4. (4 punti)

Sia p il prezzo di una put di maturitá T e prezzo d'esercizio K, su un titolo che paga dividendi. Sia S_0 il prezzo oggi del titolo e D il valore attuale dei dividendi che verranno distribuiti durante la vita della put. Dimostrare la seguente relazione:

$$p \geq D + K e^{-rT} - S_0$$

Es. A.A. 2018/19

1) $P(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall\, t > 0$

a) secondo la valutazione neutrale al rischio

$$p(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = e^{-rT} x\, \mathbb{Q}(\tau > T) = e^{-rT} x\, e^{-\lambda T} = x\, e^{-(\lambda + r)T}$$

b) $$\mathbb{Q}(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{\mathbb{Q}((\tau < T) \cap (\tau > t))}{\mathbb{Q}(\tau > t)} = \frac{\mathbb{Q}(t < \tau < T)}{\mathbb{Q}(\tau > t)}$$

$\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad F(t) = \mathbb{Q}(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

e $\quad \mathbb{Q}(t < \tau < T) = F(T) - F(t) = (1 - e^{-\lambda T}) - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}$$

c) Se $\tau > t$ (ossia non c'è stato il default in $(0,t]$)

~~$p(t,T)=$~~

$$p(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \tau > t] =$$

$$= x\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{Q}(\tau > T \mid \tau > t)$$

Dal punto b) ricaviamo che: $\quad \mathbb{Q}(\tau > T \mid \tau > t) = 1 - \mathbb{Q}(\tau < T \mid \tau > t) = e^{-\lambda(T-t)}$

$$\Rightarrow p(t,T) = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}$$

d) $\quad 95 = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad \frac{95}{x} = e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad (r+\lambda) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right)$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \lambda = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right) - r = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{100}{95}\right) - 0.02 = 0.01

Titoli Derivati e Gestione del Rischio   scritto del 31/01/19   Prof.ssa C. Ceci

ESERCIZIO AA 2017/18

1) $r = 1{,}9\%$ $r_f = 1.7\%$ $S_0 = 1.19\$$ tasso di cambio spot euro/dollaro

Prezzo teorico future: $F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} = 1.19\, e^{(0.019-0.017)\cdot 9/12} = 1.19\, e^{0.0015}$

$= 1.19179\ \$$

$F_0 = 1.20 > S_0 e^{(r-r_f)T} = 1.19179\ \$$ si apre la seguente opportunità d'arbitraggio

1) acquistiamo euro sul mercato spot: prestito di 1.19 \$ al tasso r per acquistare 1€ che si investe per 9 mesi al tasso r_f

2) si vendono $1 e^{r_f T}$ € sul mercato futures al prezzo F_0

Dopo 9 mesi: $F_0 e^{r_f T} - S_0 e^{rT} = 1.20\, e^{0.017\cdot 9/12} - 1.19\, e^{0.019\cdot 9/12}$

si vendono $e^{r_f T}$ € al prezzo F_0 — si restituisce il prestito

$= 1.2154 - 1.20708 = 0.00832\ \$$

Gli esercizi 2) - 3) e 4) sono gli stessi sia per l'AA 2017/18 che 2018/19

2) $S_0 = 22\$$ 3 bimestri sale 1.8% scende 2%. $r = 3\%$

Call europea $K = 23\$$ $T = 6$ mesi $f(S_T) = (S_T - 23)_+$

$S_u = S_0 + 0{,}018\, S_0 = 1.018 \cdot S_0 = 22.396\$$ $S_{uu} = S_u \cdot u = 22.799128\ \$$ $u = 1.018$

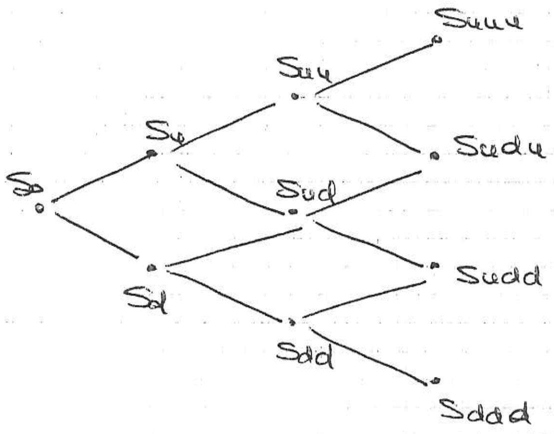
$S_d = S_0 - 0.02\, S_0 = 0{,}98 \cdot S_0 = 21.56\$$ $S_{ud} = S_u \cdot d = 21.948080\ \$$ $d = 0.98$

$S_{dd} = S_d \cdot d = 21.1288\ \$$

$S_{uuu} = S_{uu} \cdot u = 23.2095123\$$, $S_{ddd} = S_{dd} \cdot d = 20.706224\$$

$S_{uud} = S_{uu} \cdot d = 22.34314544\$$

$S_{ddu} = S_{dd} \cdot u = 21.5091184\ \$$



$f_{uuu} = (S_{uuu} - 22)_+ = 1.209512304\$$

$f_{udu} = (S_{udu} - 22)_+ = 0.34314544\$$

$f_{udd} = (S_{ddu} - 22)_+ = 0$

$f_{ddd} = (S_{ddd} - 22)_+ = 0$

Misura neutrale al rischio: $\Delta t = 2/12 = 1/6$ anni

$p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \dfrac{e^{0.03 \times 1/6} - 0.98}{1.018 - 0.98} = 0.6582242$ $\quad 1-p = 0.3417758 \quad e^{-r\Delta t} = 0.995012$

Procediamo a ritroso sull'albero: $\quad f_{uu} = e^{-r\Delta t}\, \mathbb{E}^{*}[\, f(S_T) \mid S_{2\Delta t} = S_{uu}]$

$f_{uu} = e^{-r\Delta t} \{ f_{uuu}\, p + f_{uud}(1-p) \} = 0.9088534\$$

$f_{ud} = e^{-r\Delta t} \{ f_{udu}\, p + f_{udd}(1-p) \} = 0.2247401\$$

$f_{dd} = 0 \qquad f_u = e^{-r\Delta t} \{ f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p) \} = 0.6716732\$$

$f_d = e^{-r\Delta t} \{ f_{du}\, p + f_{dd}(1-p) \} = 0.1471916\$$

$\boxed{f_0 = e^{-r\Delta t} \{ f_u\, p + f_d (1-p) \} = 0.48996219}\,\$$

b) Parità put-call $\quad p_0 + S_0 = c_0 + K e^{-rT} \Rightarrow p_0 = c_0 + K e^{-rT} - S_0$

$p_0 = 0.48996219 + 22\, e^{-0.03 \times 5/12} - 22 = 0.162424861\,\$$

2

e) Investitore vendo 1000 calls.

Portafoglio autofinanziante di copertura $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1), (\Delta_2, B_2)\}$

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{0.52448767}{0.836} = 0.627370418$$

al tempo $t=0$ acquista 627.370418 azioni, in prestito nel portafoglio B_0

$$1000 \times \Delta_0 \cdot S_0 - 1000 \times f_0 = 13312.18702 \$$$

al tempo $t = 2$ mesi se $S_1 = S_d$

$$\Delta_{1,d} = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = \frac{0.2247401}{0.81928} = 0.274314153$$

Vende $627.370418 - 274.314153 = 353.056264$ azioni

in prestito nel portafoglio B_0 $13312.18702 \times e^{r\Delta t} - 353.056264 \times S_d = 5767.021303 \$$

al tempo $t = 4$ mesi se $S_2 = S_{dd}$

$$\Delta_{2,dd} = \frac{f_{ddu} - f_{ddd}}{S_{ddu} - S_{ddd}} = 0$$

Vende anche 274.314153 azioni

in prestito nel portafoglio B_0 $5767.021303 \cdot e^{r\Delta t} - 274.314153 \times S_{dd} \cong 0$

~~[illegible]~~ La copertura è già stata verificata in quanto $\Delta_{2,dd} = 0$ e $B_{2,dd} = 0$ e sia in caso di ulteriore ribasso o rialzo non deve pagare nulla.

3) $\mu = 8\%$ $\quad \sigma = 30\%$ $\quad r = 5\%$

$$S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \qquad \{W_t\} \text{ moto browniano}$$

a) $W_t \sim \mathcal{N}(0,t) \Rightarrow (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t \right)$

Rendimento dell'azione nel periodo $[0,T]$:

$$S_T = S_0 e^{\eta T} \Rightarrow \eta = \frac{1}{T}\left\{ (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T \right\} \sim \mathcal{N}\left((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}), \tfrac{\sigma^2}{T} \right)$$

$T = 2$ anno $\quad \eta \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad \eta \sim (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} N \quad$ ove $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = 0.08 - \frac{0.3^2}{2} = 0.035 \qquad \eta \sim 0.035 + \frac{0.3}{\sqrt{2}} N$

$$P(a < \eta < b) = P\left(a < 0.035 + \frac{0.3}{\sqrt{2}} N < b\right) = P\left(\frac{(a - 0.035)\sqrt{2}}{0.3} < N < \frac{(b - 0.035)\sqrt{2}}{0.3} \right) \qquad a = 0.03,\ b = 0.04$$

$= P(-0.024 < N < 0.024) = \Phi(0.024) - \Phi(-0.024) = 2\Phi(0.024) - 1 = 0.02$

$\Phi(0.024) \simeq 0.51$

b) $f_1(S_T) = 10\, \mathbb{1}_{\{\eta < 0.035\}}$

$$f_0 = e^{-rT}\, E^{Q}[f_1(S_T)] = e^{-rT}\, 10\, Q(\eta < 0.035) \qquad W_T^Q \sim \mathcal{N}(0,T)$$

rispetto a Q $\quad S_T = S_0^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} = S_0 e^{\eta T} \Rightarrow \eta = \frac{1}{T}\left\{ (r - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q \right\}$

$W_T^Q \sim \sqrt{T} N$

$Q(\eta < 0.035) = Q\left((r - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \cancel{\sqrt{T}}\, N < 0.035 \right) = \qquad \eta \sim (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} N$

$$= Q\left(N < \frac{0.035 - (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma/\sqrt{T}} \right) = Q\left(N < \left(\frac{0.035 - (0.05 - \frac{0.3^2}{2})}{0.3 \cdot \cancel{\sqrt{2}}} \right)\sqrt{2} \right) = Q(N < 0.14) = 0.5557$$

$$f_1 = 10\, e^{-0.05 \cdot 2}\, \Phi(0.14) = 1.8$$

$$f_2(S_T) = S_T^{-1} \qquad f_2 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, S_T^{-1} \,] = e^{-rT} S_0^{-1}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})T - \sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \right]$$

$$= \frac{e^{-rT}}{S_0}\, e^{-rT}\, e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma\sqrt{T} N} \right]}_{= e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}} = \frac{1}{S_0}\, e^{-2rT}\, e^{\sigma^2 T}$$

$$f_0 = \underbrace{10\, e^{-0.05 \cdot 2}\, \Phi(0.14)}_{1.8} + \underbrace{\frac{1}{50}\, e^{-2 \cdot 0.05 \cdot 2}\, e^{0.3^2 \cdot 2}}_{0.0196} = 1.82\,\$$$

c) $v_2(t,x) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\, S_T^{-1} \mid S_t = x \,]$

$$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} \qquad W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$$

procedendo in modo analogo

$$v_2(t,x) = \frac{1}{x}\, e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$$

d) $\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\, e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$

$e^{-0.015}$

$$\delta(t,S_t) = -\frac{1}{(39)^2}\, e^{(-2 \cdot 0.05 + 0.3^2)\frac{3}{2}} = -0.0006477$$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Se l'investitore ha venduto 10'000 derivati deve avere allo scoperto al tempo t 6.48 azioni