Scritto del 10 gennaio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con μ, e $\sigma > 0$ costanti e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Tramite la formula di Ito determinare l'espressione esplicita di S_t .
(Suggerimento: applicare Ito per determinare la dinamica di $log(S_t)$)
(ii) Individuare l'unica misura martingala Q e scrivere la dinamica di S_t rispetto a Q.
(iii) Determinare il prezzo di un derivato $v(t, x)$ (al tempo t se $S_t = x$) di payoff finale $F(S_T) = S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$.
(iv) Calcolare il delta del portafoglio di copertura, $\delta(t, x)$, al tempo t se $S_t = x$. In particolare al tempo $t = 0$, prevede l'acquisto di azioni o la vendita allo scoperto?

2. Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW^1_t) \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

$$dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_3 dW^1_t) \quad S^3_0 > 0.$$

con μ_i, $\sigma_i > 0$,$i = 1, 2, 3$, costanti, $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti.
Considerare un mercato finanziario costituito dai tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente;
(ii) In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi? In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi e completo?
(iii) Nella circostanza in cui il mercato é libero da arbitraggi e completo, determinare tramite la valutazione neutrale al rischio, il prezzo di un derivato $v(t, x_1, x_2, x_3)$ (al tempo t se se $S^i_t = x_i$, $i = 1, 2, 3$) di payoff finale $F(S^1_T, S^2_T, S^3_T) = S^1_T S^2_T S^3_T$.
(Suggerimento: utilizzare l'indipendenza di $\{W^{1,Q}_t\}_{t\geq 0}$ e $\{W^{2,Q}_t\}_{t\geq 0}$ rispetto alla misura Q).

3.
Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$ (hazard rate costante $\gamma^Q(t) = \lambda$). Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
a) Determinare il prezzo $p_1(0, T)$ (al tempo $t = 0$), di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury (pagato alla scadenza T) pari al $1 - \delta$, di valore nominale x euro e maturitá T.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 35 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 30$ euro e quello di un DZCB con recovery of treasury pari al 60% di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 28$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo oggi di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 50%, valore nominale 50 euro e maturitá 6 mesi.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio II

Scritto del 10/01/19 Prof.ssa C. Ceci

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$ $\quad S_0 > 0$

formula di Itô

$$df(S_t) = \frac{1}{2} f''(S_t) S_t^2 \sigma^2\, dt + f'(S_t)\, dS_t$$

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Posto $Y_t = \log S_t$ si ha che: $dY_t = -\frac{1}{2} \cancel{S_t^2} \sigma^2 \frac{1}{\cancel{S_t^2}} dt + \frac{1}{\cancel{S_t}} \cancel{S_t}(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$

$$dY_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \mu\, dt + \sigma\, dW_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t$$

Integrando tra 0 e t: $\log S_t - \log S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t \qquad \log \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t$

$$\Rightarrow \quad S_t = S_0\, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t}$$

(ii) Q è una misura martingala equivalente se $\forall A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$

e $\{S_t e^{-rt}\}_{t \geq 0}$ è una Q-mg, ossia $\forall s > t$ $\quad \mathbb{E}^Q[S_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{-rt}$

ossia $\mathbb{E}^Q[S_s \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{+r(s-t)} \quad \forall s > t$

Determinare Q equivale a scrivere la dinamica di S_t nel seguente modo

$$dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q) = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t)$$

$$\Rightarrow \quad dS_t = S_t \left\{ r\,dt + \sigma \left[dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right] \right\} \quad \Rightarrow \quad W_t^{Q} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

ed il teorema di Girsanov ci assicura che esiste una sola misura Q, equivalente a P, tale che $\quad W_t^{Q} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t \quad$ sia un Q-moto browniano

$\frac{\mu - r}{\sigma}$ = prezzo di mercato del rischio

Rispetto a Q: $\quad dS_t = S_t \left(r\,dt + \sigma\, dW_t^{Q} \right)$

(iii) Per la valutazione neutrale al rischio:

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\left[F(S_T) \mid S_t = x \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\left[S_0 \mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}} \mid S_t = x \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} S_0\, Q\left(S_T > S_0 \mid S_t = x \right)$$

Essendo $\quad S_T = S_t\, e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}$ $\quad W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \mathcal{N}(0, T-t) \quad W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim \sqrt{T-t}\, N$, $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$Q(S_T > S_0 \mid S_t = x) = Q\left(x\, e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})} > S_0 \right) = Q\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q}) > \lg\left(\frac{S_0}{x}\right) \right)$$

$$= Q\left(\sigma\sqrt{T-t}\, N > \lg\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right) = Q\left(N > \frac{\lg\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) =$$

$$= 1 - \Phi(\ell(t,x))$$ ove $\Phi(x) = P(N \leq x)$ f. di dist. di $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

ove $\quad \ell(t,x) = \frac{\lg\left(\frac{S_0}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \ell(t,x) = -\frac{\lg\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$\Rightarrow \quad v(t,x) = S_0\, e^{-r(T-t)} \overbrace{\left(1 - \Phi(\ell(t,x)) \right)}^{\Phi(d_2(t,x))}$$

oppure $\quad 1 - \Phi(\ell(t,x)) = \Phi(d_2(t,x))$

$d_2(t,x) = \left[\lg\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right] / \sigma\sqrt{T-t}$

(iv) Il delta del portafoglio di copertura è $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -S_0 e^{-r(T-t)} \Phi'(R(t,x)) \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\frac{x}{S_0}} \cdot \frac{1}{S_0} = -\frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{S_0}{x\sigma\sqrt{T-t}} e^{-r(T-t)} \Phi'(R(t,x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2(t,x)}{2}} \frac{S_0}{x\sigma\sqrt{T-t}} e^{-r(T-t)}}$$

Per $t=0$ $\quad \delta_0 = \frac{S_0\Phi'(R_0)e^{-rT}}{S_0\sigma\sqrt{T}} = \frac{\Phi'(R_0)e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} > 0$ prevede l'acquisto di azioni, per ogni derivato venduto dobbiamo acquistare $\frac{\Phi'(R_0)e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}$ azioni.

$$\boxed{R_0 = R(0,S_0) = -\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\left(\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T} = \left(\frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{T}}$$

2)

$$\begin{cases} dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW^1_t) \\ dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW^2_t) \\ dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_3 dW^1_t) \end{cases}$$

(i) Q è una misura martingala equivalente a P se $\forall A \in \mathcal{F}$ $\quad Q(A)=0 \Leftrightarrow P(A)=0$

e $\{S^i_t e^{-rt}\}_{t\geq 0}$ $\quad i=1,2,3$ sono Q-martingale

$$\mathbb{E}^Q[S^i_s e^{-rs} \mid \mathcal{F}_t] = S^i_t e^{-rt} \quad \forall t > s$$

(ii) Secondo il primo teorema dell'Asset Pricing il mercato è libero da arbitraggi se esiste almeno una misura martingala. Le misure mg si trovano determinando le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \\ \mu_3 - r \end{pmatrix}$$

Questo sistema non ammette soluzioni nel caso in cui

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & \mu_1 - r \\ 0 & \sigma_2 & \mu_2 - r \\ \sigma_3 & 0 & \mu_3 - r \end{vmatrix} \neq 0$$

infatti per il teorema di Rouché-Capelli avremmo

$$\underbrace{rg\, A}_{\text{matrice dei coeff}} = 2 \neq \underbrace{rg\, C}_{\text{matrice completa}} = 3$$

ossia $\sigma_1 \begin{vmatrix} \sigma_2 & \mu_2 - r \\ 0 & \mu_3 - r \end{vmatrix} + (\mu_1 - r) \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2(\mu_3 - r) - \sigma_2\sigma_3(\mu_1 - r) \neq 0$

$\iff \sigma_1 \cancel{\sigma_2}(\mu_3 - r) \neq \cancel{\sigma_2}\sigma_3(\mu_1 - r)$ $\quad \frac{\mu_3 - r}{\sigma_3} \neq \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ se il prezzo di mercato del rischio del terzo titolo $\neq$ dal prezzo di mercato del rischio del primo titolo

Infatti $\begin{cases} \sigma_1\theta_1 = \mu_1 - r \\ \sigma_2\theta_2 = \mu_2 - r \\ \sigma_3\theta_1 = \mu_3 - r \end{cases}$ $\quad \theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ $\quad \theta_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$

il sistema è compatibile ed ammette una sola soluzione nel caso in cui $\frac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$

(ii) il mercato è libero da arbitraggi se $\frac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ ed in tal caso è anche completo e l'unica misura Q è tale che

$$W_t^{Q,1} = W_t^1 + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} t \quad e \quad W_t^{Q,2} = W_t^2 + \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} t$$

(iv) Se $\frac{\mu_3 - r}{\sigma_3} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ la dinamica di S^1, S^2 e S^3 rispetto a Q è la seguente

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1(r + \sigma_1 \, dW_t^{Q,1}) \\ dS_t^2 = S_t^2(r + \sigma_2 \, dW_t^{Q,2}) \\ dS_t^3 = S_t^3(r + \sigma_3 \, dW_t^{Q,1}) \end{cases}$$

Per la valutazione neutrale al rischio:

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S^1_T \cdot S^2_T \cdot S^3_T \mid S^1_t = x_1,\ S^2_t = x_2,\ S^3_t = x_3 \right]$$

$$S^1_T = S^1_t\, e^{(r - \sigma_1^2/2)(T-t) + \sigma_1 (W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)}$$

$$S^2_T = S^2_t\, e^{(r - \sigma_2^2/2)(T-t) + \sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)}$$

$$S^3_t = S^3_t\, e^{(r - \sigma_3^2/2)(T-t) + \sigma_3 (W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)}$$

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = e^{-r(T-t)}\, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{(3r - \sigma_1^2/2 - \sigma_2^2/2 - \sigma_3^2/2)(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)(W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)} \cdot e^{\sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)} \right]$$

essendo $\{W^{1\mathbb{Q}}_t\} \perp \{W^{2\mathbb{Q}}_t\}$

il valore atteso si fattorizza: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)(W^{1\mathbb{Q}}_T - W^{1\mathbb{Q}}_t)} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_2 (W^{2\mathbb{Q}}_T - W^{2\mathbb{Q}}_t)} \right] =$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(\sigma_1+\sigma_3)\sqrt{T-t}\,N} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_2 \sqrt{T-t}\,N} \right]$$

$\mathbb{E}[e^{\alpha N}] = e^{\alpha^2/2}$

$$= e^{\frac{(\sigma_1+\sigma_3)^2}{2}(T-t)}\, e^{\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t)}$$

$$\Rightarrow v(t,x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{2r(T-t)}\, e^{\left(\cancel{-\frac{\sigma_1^2}{2}} \cancel{-\frac{\sigma_2^2}{2}} \cancel{-\frac{\sigma_3^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_1^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_3^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_2^2}{2}} + \sigma_1\sigma_3\right)(T-t)}$$

$$v(t,x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\, e^{2r(T-t)}\, e^{\sigma_1\sigma_3 (T-t)}$$

3) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t > 0$

$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Prezzo DZCB con recovery of treasury (pagato al tempo T) pari a $1-\delta$

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left(x\,\mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{(\tau \le T)}\right)$$

$$= e^{-rT} x \{ Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \le T) \} = e^{-rT} x \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \}$$

$$= x\,e^{-rT}(1 - \delta + \delta e^{-\lambda T})$$

b) $P_0 = 30€ \quad P_1 = P_{RT}(0,T) = 28€ \quad T = 2$ anni $\quad x = 35€ \quad 1-\delta = 60\%$

$P_1 = P_0(1 - \delta + \delta e^{-\lambda T})$ $\quad$ essendo $P_0 = x\,e^{-rT}$

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P_1}{P_0} - (1-\delta)\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{P_1}{\delta P_0} - \frac{1-\delta}{\delta}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{28}{0.4 \cdot 30} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.09116$$

c) $\bar{T} = 6$ mesi $\quad 1-\delta = 50\% \quad x = 50€$

Determiniamo r dalla relazione $\quad 30 = 35\,e^{-2r} \quad r = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{30}{35}\right) = 0{,}077 \quad$ 7,7% annuo

$$P_1(0,\bar{T}) = 50\,e^{-r\cdot\frac{1}{2}}\left(0.5 + 0.5\,e^{-0.09116\cdot\frac{1}{2}}\right) = 47\,€$$