Scritto del 10/01/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (7 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$ e $q = Q(\tau \leq T) \in (0, 1)$ con T scadenza fissata.
a) Determinare il prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al $1 - \delta$, di valore nominale x euro e maturitá T.
b) Sia $p_1(0, T) = 64$ euro, $x = 100$ euro, $\delta = 40\%$,maturitá $T = 3$ anni e $q = 0, 8$, determinare il tasso di interesse privo di rischio r.
c) Utilizzando il punto b), calcolare il prezzo al tempo $t = 6$ mesi un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 20%, valore nominale 100 euro e maturitá $T = 3$ anni. (Suggerimento: dal valore di q calcolare l'intesitá di default dell'istituzione finanziaria λ).

2. (10 punti)
Il prezzo di un'azione é di 40$ e la volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 3%. Costruire l'albero binomiale a due stadi con $T = 12$ mesi (suggerimento si utilizzi $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ con $\Delta t = 6$ mesi)
a) Qual' é il valore di un derivato di payoff finale $log^2(S_T) + S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$ e scadenza 12 mesi?
b) Un investitore ha venduto 1000 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare che tale strategia replica il derivato).

3. (11 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 3% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$ ove $F_1(S_T) = log^2(S_T)$ e $F_2(S_T) = S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 40$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0 del derivato oggi;
b) il prezzo del derivato di payoff finale $F_1(S_T)$, $v_1(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati di payoff finale $F_1(S_T)$, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti) Il prezzo di un indice azionario é di 30$ e il suo dividend yield del 3% annuo. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 2% annuo.
a) Qual' é il prezzo future teorico a 9 mesi dell'indice?
b) Dopo 4 mesi il prezzo dell'indice é salito a 32$. Qual'é in quel momento il valore unitario del contratto future per la posizione lunga.

Titoli Derivati e Gestione del rischio I

Scritto del 10/01/19 Prof.ssa C. Ceci

1) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

$q = Q(\tau \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$

a) Per la valutazione neutrale al rischio:

$P_1(0,T) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[x \mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau \leq T)}] =$

$= x e^{-rT} \{Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \leq T)\}$ $\qquad Q(\tau > T) = 1 - Q(\tau \leq T) = 1 - q$

$= x e^{-rT} \{1 - q + (1-\delta) q\} = x e^{-rT} \{1 - \delta q\}$

in modo equivalente $\quad Q(\tau > T) = e^{-\lambda T} \quad Q(\tau \leq T) = 1 - e^{-\lambda T} = q$

$P_1(0,T) = x e^{-rT} \{1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}\}$

b) $P_1(0,T) = 64 €$ $\quad x = 100 €$ $\quad \delta = 40\%$ $\quad 1-\delta = 60\%$ recovery $\quad T = 3$ anni $\quad q = 0.8$

$64 = 100 e^{-3r} \{1 - 0.4 \cdot 0.8\} = 100 e^{-3r} \cdot 0.68$ $\qquad e^{-3r} = \frac{64}{68}$

$-3r = \lg\left(\frac{64}{68}\right)$ $\qquad r = -\frac{1}{3} \lg\left(\frac{64}{68}\right) = 0.02$ $\qquad r = 2\%$

c) Determiniamo λ: $\quad 1 - e^{-3\lambda} = 0.8 \quad e^{-3\lambda} = 0.2 \quad -3\lambda = \lg 0.2 \quad \lambda = -\frac{1}{3} \lg 0.2$

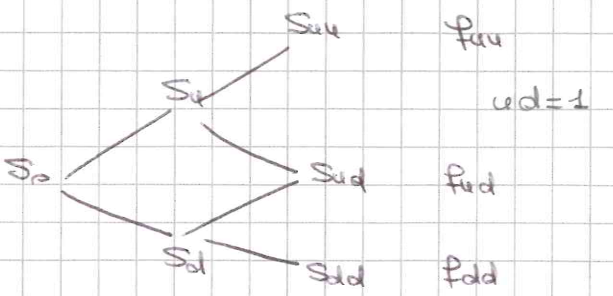
$1 - \delta = 20\% \Rightarrow \delta = 80\%$ $\qquad \lambda = 53.65\%$

$P_1(t,T) = 100 e^{-r(T-t)} \{0.2 + 0.8 e^{-\lambda(T-t)}\}$ $\qquad T - t = 3 - 0.5 = 2.5$ anni

$P_1(t,T) = 100 e^{-0.02 \cdot 2.5} \{0.2 + \underbrace{0.8 e^{-0.5365 \cdot 2.5}}_{0.4092}\} = 38.93 €$

2) $S_0 = 40\$$ $\qquad \sigma = 30\%$ $\qquad r = 3\%$ $\qquad T = 12$ mesi $= 1$ anno $\qquad \Delta t = 6$ mesi $= 0.5$ anni

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.3\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1.2363 \qquad d = 0.80886 \qquad ud = 1$



$S_u = uS_0 = 49.452$

$S_d = dS_0 = 32.3544$

$S_{uu} = uS_u = 61.1375$

$S_{ud} = dS_u = 39.9997 = 40$

$S_{dd} = dS_d = 26.172$

$F(S_T) = (\lg S_T)^2 + 40\,\mathbb{1}_{\{S_T > 40\}}$

$f_{uu} = F(S_{uu}) = \underbrace{(\lg S_{uu})^2}_{16.9178} + 40 = 56.9178\,\$$

$f_{ud} = F(S_{ud}) = 13.608\,\$$

$f_{dd} = F(S_{dd}) = 10.6577\,\$$

a)
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03\cdot\frac{1}{2}} - d}{u - d} = 0.48253 \qquad 1 - p = 0.51747 \qquad e^{-r\Delta t} = 0.98511$$

$e^{r\Delta t} = 1.01511$

Procedo a ritroso sull'albero:

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\,p + f_{ud}(1-p)\} = 33.99247\,\$ \qquad f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}\,p + f_{dd}(1-p)\} = 11.9014\,\$$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u\,p + f_d(1-p)\} = 22.225\,\$$

b)
$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 1.29206$$

Deve acquistare 1'292,06 azioni, in prestito ha: $\quad 1'292.06\,S_0 - 1'000\,f_0 = 29'477.22\,\$$

Dopo 6 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 2.0489 & \text{se } S_1 = S_u \text{ deve acquistare anche } 2'048.9 - 1'292.06 = 756.896 \text{ azioni} \\[2ex] \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = 0.213326 & \text{se } S_1 = S_d \text{ vende } 1'292.06 - 213.326 = 1'078.73 \text{ azioni} \end{cases}$$

In caso di rialzo in prestito nel portafoglio ha:

$$29'477.32\, e^{r\Delta t} + 756.99 \cdot S_u = 67'352.72\,\$$$

In caso di ribasso in prestito nel portafoglio ha:

$$29'477.32\, e^{r\Delta t} - 1'078.73\, S_d = -4'979.06$$

Al tempo T = 1 anno vende le azioni; se $S_1 = S_u$ restituisce il prestito

$$2'048.9\, S_T - 67'352.72\, e^{r\Delta t} = \begin{cases} 56'895 \sim 1'000\, f_{uu} & \text{se } S_T = S_{uu} \\ 13'549.6 \simeq 1'000\, f_{ud} & \text{se } S_T = S_{ud} \end{cases}$$

Al tempo T = 1 anno vende le azioni e restituisce il prestito se $S_1 = S_d$

$$4'979.06\, e^{r\Delta t} + 213.326 \cdot S_T = \begin{cases} 13'587.3 \simeq 1'000\, f_{ud} & \text{se } S_T = S_{ud} \\ 10'637.03 \simeq 1'000\, f_{dd} & \text{se } S_T = S_{dd} \end{cases}$$

3.) $r = 3\%$ $\sigma = 30\%$ $T = 12$ mesi $S_0 = 40\$$

$$F(S_T) = \lg^2 S_T + S_0 \mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}}$$

a) $$v_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[\, F(S_T)\,] \qquad S_T = S_0\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$$

$\{W_t^Q\}$ moto browniano rispetto a Q

$$v_0 = e^{-rT}\left\{ \mathbb{E}^Q\left[\lg^2\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}\right)\right] + S_0\, Q(S_T > S_0)\right\}$$

$$= e^{-rT}\left\{ \mathbb{E}^Q\left[\left(\lg S_0 + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q\right)^2\right] + S_0\, Q\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} > S_0\right)\right\}$$

$$= e^{-rT}\left\{ \left(\lg S_0 + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T\right)^2 + \mathbb{E}\left[2\left(\lg S_0 + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T\right)\sigma W_T^Q\right] + \mathbb{E}\left[\sigma^2 (W_T^Q)^2\right]\right\} + S_0\, e^{-rT} Q\left((r-\tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q > 0\right)$$

$$W_T^Q \sim \mathcal{N}(0,T) \Rightarrow \mathbb{E}^Q(W_T^Q) = 0 \qquad \mathbb{E}^Q((W_T^Q)^2) = T$$

$$Q\left((r-\tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q > 0\right) = Q\left(\sigma\sqrt{T}\, N > -(r-\tfrac{\sigma^2}{2})T\right) = Q\left(N > -\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = Q\left(N < \frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

$$= Q(N < -0.05) = 0.48$$

$$v_0 = e^{-rT}\left\{ \left[\lg S_0 + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T\right]^2 + \sigma^2 T\right\} + S_0\, e^{-rT}\, \Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) =$$

$$\lg^2 S_0 + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})^2 T^2 + 2\lg S_0 (r-\tfrac{\sigma^2}{2})T$$

$$= e^{-0.03}\left\{ \left(\lg 40 + 0.03 - \frac{0.3^2}{2}\right)^2 + 0.3^2\right\} + 40\, e^{-0.03} \cdot 0.48$$

$$= 13.1858 + 18.6325 = 31.8183\ \$$$

b) $v_1(t,x) = e^{-r(T-t)} \, \mathbb{E}^{Q}\left[(\log S_T)^2 \mid S_t = x \right] =$

$S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}$

$W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim N(0, T-t)$

procedendo in modo analogo al punto a)

$$= e^{-r(T-t)} \left\{ \left[\log x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2 + \sigma^2 (T-t) \right\}$$

c) $$\delta(t,x) = \frac{\partial v_1}{\partial x} = 2 e^{-r(T-t)} \left(\log x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\delta(0,S_0) = \frac{2}{S_0} e^{-0.03} \left(\log S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right) = 0.178$$

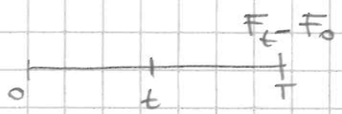
l'istituzione finanziaria deve acquistare 178 azioni

4) $S_0 = 30\$$ $\quad q = 3\%$ $\quad r = 2\%$

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} = 30 \, e^{(0.02 - 0.03)\cdot 9/12} = 29.7758\,\$$$

$S_t = 32\,\$$ $$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)} = 32 \, e^{(0.02-0.03)\cdot 5/12} = 31.867\,\$$$

$T - t = 5$ mesi



Valore del contratto per la posizione lunga

$$f_t = e^{-r(T-t)} \{ F_t - F_0 \} =$$

$$= e^{-0.02 \cdot 5/12} \{ F_t - F_0 \} = 2.074\,\$$$