Scritto del 10 gennaio 2019
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

**1.** Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 > 0,$$

con $\mu$, e $\sigma > 0$ costanti e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano. Si indichi con $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente.
(i) Tramite la formula di Ito determinare l'espressione esplicita di $S_t$ .
(Suggerimento: applicare Ito per determinare la dinamica di $log(S_t)$)
(ii) Individuare l'unica misura martingala $Q$ e scrivere la dinamica di $S_t$ rispetto a $Q$.
(iii) Determinare il prezzo di un derivato $v(t, x)$ (al tempo $t$ se $S_t = x$) di payoff finale $F(S_T) = S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$.
(iv) Calcolare il delta del portafoglio di copertura, $\delta(t, x)$, al tempo $t$ se $S_t = x$. In particolare al tempo $t = 0$, prevede l'acquisto di azioni o la vendita allo scoperto?

**2.** Siano $\{S^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW^1_t) \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

$$dS^3_t = S^3_t(\mu_3 dt + \sigma_3 dW^1_t) \quad S^3_0 > 0.$$

con $\mu_i$, $\sigma_i > 0$,$i = 1, 2, 3$, costanti, $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti.
Considerare un mercato finanziario costituito dai tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente;
(ii) In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi? In quale circostanza il mercato é libero da arbitraggi e completo?
(iii) Nella circostanza in cui il mercato é libero da arbitraggi e completo, determinare tramite la valutazione neutrale al rischio, il prezzo di un derivato $v(t, x_1, x_2, x_3)$ (al tempo $t$ se se $S^i_t = x_i$, $i = 1, 2, 3$) di payoff finale $F(S^1_T, S^2_T, S^3_T) = S^1_T S^2_T S^3_T$.
(Suggerimento: utilizzare l'indipendenza di $\{W^{1,Q}_t\}_{t\geq 0}$ e $\{W^{2,Q}_t\}_{t\geq 0}$ rispetto alla misura $Q$).

**3.**
Sia $Q$ una misura neutrale al rischio. Sia $\tau$ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$ (hazard rate costante $\gamma^Q(t) = \lambda$). Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
a) Determinare il prezzo $p_1(0, T)$ (al tempo $t = 0$), di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury (pagato alla scadenza $T$) pari al $1 - \delta$, di valore nominale $x$ euro e maturitá $T$.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 35 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 30$ euro e quello di un DZCB con recovery of treasury pari al 60% di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 28$ euro. Determinare l'intensitá di default $\lambda$ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo oggi di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 50%, valore nominale 50 euro e maturitá 6 mesi.