Scritto del 21/12/2018

Titoli Derivati e Gestione del Rischio I

1) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$

a) $P_1(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] =$

$= x\, e^{-rT} \left\{ Q(\tau > T) + (1-\delta)\, Q(\tau \leq T) \right\}$

$Q(\tau \leq T) = 1 - Q(\tau > T) = 1 - e^{-\lambda T}$

$\Rightarrow P_1(0,T) = x\, e^{-rT} \left\{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \right\} = x\, e^{-rT} \left\{ \delta\, e^{-\lambda T} + (1-\delta) \right\}$

b) $T = 2$ anni $\quad P_0 = 30€ \quad P_1 = 28€ \quad 1-\delta = 60\% \quad T = 2$ anni $\quad x = 35$

$\delta = 40\%$

$P_1 = P_0 \left\{ \delta\, e^{-\lambda T} + (1-\delta) \right\}$ $\qquad \dfrac{P_1}{P_0} - (1-\delta) = \delta\, e^{-\lambda T}$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P_1}{P_0} - (1-\delta) \right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{T} \ln\left\{ \frac{1}{\delta}\left(\frac{P_1}{P_0} - (1-\delta) \right) \right\}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \ln\left\{ \frac{28}{30 \cdot 0.4} - \frac{0.6}{0.4} \right\} = 0.0916$$

c) $\lambda = 9.116\%$ determiniamo r dalla relazione $p_1 = x\,e^{-rT}$

$\delta = 50\%$ $30 = 35\,e^{-2r}$ $-2r = \ln\left(\frac{30}{35}\right)$ $r = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{30}{35}\right) = 0.077$

$r = 7.7\%$

$\overline{T} = \frac{1}{2}$ anno

$P_1(0,\overline{T}) = 50\,e^{-0.077\cdot\frac{1}{2}}\left\{0.5\,e^{-0.09116\cdot\frac{1}{2}} + 0.5\right\} = 47.04$ €

2) $S_0 = 45$ \$ sale del 5% $r = 4\%$

scende del 4%

put europea $K = 46$ \$ $T = 4$ mesi

$u = 1.05$ $d = 0.96$

$S_u = S_0 + S_0\cdot 0.05 = 1.05\cdot S_0 = 47.25$ \$

$S_d = S_0 - S_0\cdot 0.04 = 0.96\cdot S_0 = 43.20$ \$

$S_{uu} = 49.6125$ \$

$S_{ud} = 45.36$ \$

$S_{dd} = 41.472$ \$

S_0, S_u, S_d

S_{uu} $f_{uu} = (46 - S_{uu})_+ = 0$

S_{ud} $f_{ud} = (46 - S_{ud})_+ = 0.64$ \$

S_{dd} $f_{dd} = (46 - S_{dd})_+ = 4.528$ \$

prob. neutrale al rischio

$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.04\cdot 2/12} - 0.96}{1.05 - 0.96} = 0.518766$

$1 - p = 0.481234$

Procedo a ritroso sull'albero:

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\,p + f_{ud}(1-p)\} = 0.3059$ \$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{du}\,p + f_{dd}(1-p)\} = 2.49435$ \$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u\,p + f_d(1-p)\} = 1.35$ \$

b) Dalla relazione di parità:

$P_0 + S_0 = C_0 + K e^{-rT}$ $1.35 + 45 = C_0 + 46\,e^{-0.04\cdot 4/12}$ $\Rightarrow$ $C_0 = 0.9593$ \$

c) 100 put

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = -0.5403$$

L'investitore vende allo scoperto 54,03 azioni, nel portafoglio ha:

$$100 \cdot p_0 + 54.03 \cdot S_0 = 2566.42 \,\$$$

Dopo 2 mesi:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{u} = \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = -0.1504997 & \text{se } S_1 = S_u \\[2ex] \Delta_d = \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = -1 & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

54.03 - 15.04

se $S_1 = S_u$ (in caso di rialzo del prezzo) acquista 38.99 azioni, nel portafoglio detiene:

$$2566.42\, e^{r\Delta t} - 38.99 \cdot S_u = 741.696 \,\$$$

100 - 54.03

se $S_1 = S_d$ (in caso di ribasso del prezzo) vende allo scoperto anche 45.97 azioni, nel portafoglio ha:

$$2566.42\, e^{r\Delta t} + 45.97 \cdot S_d = 4569.41 \,\$$$

Verifichiamo la correttezza:

se $S_1 = S_u$ acquista 15.04 azioni e chiude la posizione allo scoperto

$$741.696\, e^{r\Delta t} - 15.04 \cdot S_T = \begin{cases} 741.696\, e^{r\Delta t} - 15.04 \cdot S_{uu} = 0 = 100 \cdot f_{uu} & \text{se } S_2 = S_{uu} \\ 741.696\, e^{r\Delta t} - 15.04 \cdot S_{du} = 64 = 100 \cdot f_{ud} & \text{se } S_2 = S_{ud} \end{cases}$$

se $S_1 = S_d$ acquista 100 azioni e chiude la posizione allo scoperto

$$4569.41\, e^{r\Delta t} - 100 \cdot S_T = \begin{cases} 4569.41\, e^{r\Delta t} - 100 \cdot S_{ud} = 64 = 100 \cdot f_{ud} & \text{se } S_2 = S_{ud} \\ 4569.41\, e^{r\Delta t} - 100 \cdot S_{dd} = 452 = 100 \cdot f_{dd} & \text{se } S_2 = S_{dd} \end{cases}$$

3) $F(S_T) = (S_T)^{1/3}$ $\quad S_0 = 30\$ \quad r = 3\% \quad \sigma = 20\% \quad \mu = 5\% \quad T = 9$ mesi

a) Secondo la valutazione neutrale al rischio:

$$v_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T)] = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left[(S_0)^{1/3}\, e^{\frac{1}{3}(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \frac{1}{3}\sigma W_T^{Q}}\right] =$$

$$S_T = S_0\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{Q}}$$

$\{W_t^{Q}\}$ moto browniano rispetto a Q

$$= e^{-rT}(S_0)^{1/3}\, e^{\frac{1}{3}(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\, \underbrace{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{3}\sigma W_T^{Q}}\right]}_{=\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{3}\sigma\sqrt{T}N}\right] = e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 T}{9}}} \qquad = (S_0)^{1/3}\, e^{-rT}\, e^{\frac{1}{3}rT}\, e^{-\frac{\sigma^2}{6}T + \frac{\sigma^2}{18}T}$$

$W_T^{Q} \sim N(0,T)$

$W_T^{Q} \sim \sqrt{T}N$

$N \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \quad v_0 = (S_0)^{1/3}\, e^{-(\frac{2}{3}r + \frac{1}{9}\sigma^2)T} \qquad v_0 = \sqrt[3]{30}\; e^{-(\frac{2}{3}0.03 + \frac{1}{9}0.2^2)\frac{9}{12}} = 3{,}051\$$$

b) $$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T) \mid S_t = x]$$

$$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{Q} - W_t^{Q})}$$

e tenendo conto che $W_T^{Q} - W_t^{Q} \sim N(0, T-t)$ troviamo che

$$v(t,x) = x^{1/3}\, e^{-(\frac{2}{3}r + \frac{\sigma^2}{9})(T-t)}$$

Eq. di valutazione di Black & Scholes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + r x \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - r V = 0 \\ V(T, x) = F(x) \qquad V(T,x) = x^{1/3} \text{ verificata} \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = +\left(\frac{2}{3} r + \frac{\sigma^2}{9}\right) V$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1} e^{-\left(\frac{2}{3} r + \frac{\sigma^2}{9}\right)(T-t)}$$

$$\Downarrow$$

$$r x \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3} r V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right) x^{1/3 - 2} e^{-\left(\frac{2}{3} r + \frac{\sigma^2}{9}\right)(T-t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 = \frac{1}{2}\sigma^2\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} V = -\frac{1}{9}\sigma^2 V$$

$$+\left(\frac{2}{3} r + \frac{\sigma^2}{9}\right) V + \frac{1}{3} r V - \frac{1}{9}\sigma^2 V - r V = 0 \qquad \text{verificata}$$

4) $S_0 = 30\$$ $T = 6$ mesi $K = 31\$$ prezzo di esercizio $c_0 = 2\$$ call

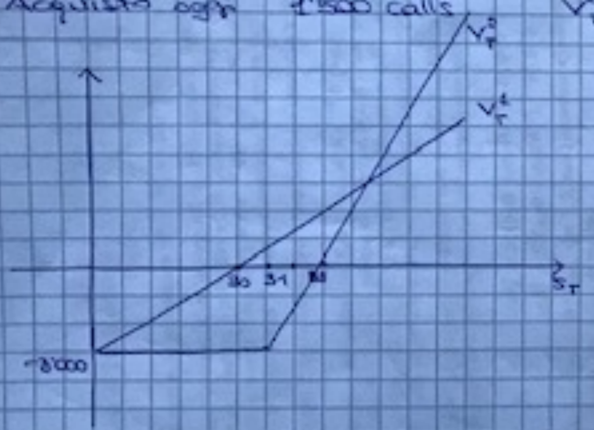
Disponibilità $3'000\$$

1° strategia: investiamo in azioni

Acquisto oggi 100 azioni che rivenderò al tempo T $V_T^1 = 100(S_T - 30)$ payoff finale

2° strategia: investiamo in calls

Acquisto oggi 1'500 calls $V_T^2 = 1'500(S_T - K)_+ - 3'000 = \begin{cases} 1'500(S_T - 31) - 3'000 = 1'500(S_T - 33) & \text{se } S_T > 31 \\ -3'000 & \text{se } S_T \le 31 \end{cases}$



$$1'500(S_T - 33) \ge 100(S_T - 30)$$

$$15 S_T - S_T \ge 15 \cdot 33 - 30 = 465$$

$$14 S_T \ge 465$$

$$S_T \ge \frac{465}{14} = 33.21\$$$