FOGLIO DI ESERCIZI SUL RISCHIO DI CREDITO
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I e II, a.a. 2018/19
Prof.ssa Claudia Ceci

1.
Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Determinare l'espressione del prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB (senza recovery) di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Sia oggi ($t = 0$) il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro e maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria (senza recovery) di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 30$ euro. Determinare l'intensit di default λ e la probabilitá' di insolvenza $q = Q(\tau \leq T)$.
(iii) Utilizzando il valore di λ calcolato al punto (ii), ipotizzando che tra un anno non si sia verificato il default, determinare il prezzo al tempo $t = 1$ anno del DZCB.

2. Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Determinare l'espressione del prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al 70% di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Sia oggi ($t = 0$) il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB con recovery of treasury pari al 70% di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 40$ euro. Determinare l'intensit di default λ e e la probabilitá' di insolvenza $q = Q(\tau \leq T)$.
(iii) Utilizzando il valore di λ calcolato al punto (ii) determinare il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 50%.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r = 3\%$ e $Q(\tau \leq T) = 0,08$, con T pari ad un anno.
(i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB di valore nominale 100 emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al 40% e maturitá $T = 1$ anno,
(ii) Determinare l'intensit di default λ dell'istituzione finanziaria.

1) Poiché τ ha distribuzione esponenziale, si ha che
$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

(i) Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left[100\,\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}\right] = 100\,e^{-rT}\,Q(\tau>T) = 100\,e^{-(r+\lambda)T}$$

(ii) $T = 2$ anni

$P_0 = 50€ \qquad P_1 = 30€$

$$P_0 = 100\,e^{-rT} \qquad P_1 = 100\,e^{-(r+\lambda)T} = P_0\,e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{30}{50}$$

$$\lambda = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{50}{30}\right) = \frac{1}{2}\,0.5108 = 0.2554$$

$$Q(\tau>T) = e^{-\lambda T} \qquad Q(\tau\le T) = 1 - Q(\tau>T) = 1 - \frac{30}{50} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

(iii) ad un generico istante $t<T$:

$$P_1(t,T) = 100\,e^{-(r+\lambda)(T-t)}\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \qquad t = 1 \text{ anno} \quad T = 2 \text{ anni} \quad T-t = 1 \text{ anno}$$

se $\tau > 1$ anno

$P_1(1,2) = 100\,e^{-(r+\lambda)}$ dobbiamo calcolare il valore di r; sapendo che $P_0 = 50 = 100\,e^{-rT} = 100\,e^{-2r}$

$$-2r = \ln\left(\frac{50}{100}\right) \qquad r = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.3466$$

$$r = 34.66\,\%$$

$$\Rightarrow P_1(1,2) = 100\,e^{-(0.3466+0.4)} = 100\,e^{-0.7466} = \frac{100}{2{,}1098} = 47.40€$$

2) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

DZCB recovery $1-\delta = 70\%$ e valore nominale $100\,€$

Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 70\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} \right] =$$

$$= e^{-rT} \{ 100\, Q(\tau > T) + 70\, Q(\tau \le T) \} \qquad \text{essendo } Q(\tau \le T) = 1 - Q(\tau > T)$$

$$= e^{-rT} \{ 30\, Q(\tau > T) + 70 \}$$

$$= e^{-rT} \{ 70 + 30\, e^{-\lambda T} \}$$

(ii) $P_0 = 50\,€ \qquad P_1 = 40\,€ \qquad P_0 = 100\, e^{-rT} \qquad T = 3 \text{ anni}$

Dalla formula sopra scritta segue che $P_1 = 100\, e^{-rT} \{ \underbrace{0.70}_{1-\delta} + \underbrace{0.30}_{\delta} e^{-\lambda T} \} = P_0 \{ 0.7 + 0.3\, e^{-\lambda T} \}$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 0.7 + 0.3\, e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.3}\left(\frac{P_1}{P_0} - 0.7 \right) = \frac{1}{0.3}\left(\frac{40}{50} - 0.7 \right) = 0.\overline{33} = \frac{1}{3}$$

$$q = Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda T} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.366$$

(iii) Ora $1-\delta = 50\%$

$$\overline{P}_1(0,T) = 100\, e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta\, e^{-\lambda T} \} = P_0 \{ 0.5 + 0.5 \cdot \tfrac{1}{3} \} = 50 \{ 0.5 + 0.5\, \tfrac{1}{3} \} = 33.\overline{33}\,€$$

3) $r = 3\%$ $\quad Q(\tau \leq T) = 0.08 \quad T = 1$ anno

(i) $P_{ET}(0,T) \quad 1-\delta = 40\% \quad T = 1$ anno

Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_{ET}(0,T) = 100\, e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + (1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] =$$

$$= 100\, e^{-rT} \left\{ Q(\tau > T) + (1-\delta)\, Q(\tau \leq T) \right\} = \qquad \text{essendo } Q(\tau \leq T) = 1 - Q(\tau > T)$$

$$= 100\, e^{-rT} \left\{ 1-\delta + \delta\, Q(\tau > T) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad P_{ET}(0,T) = 100\, e^{-0.03} \left\{ 0.40 + 0.60 \cdot 0.92 \right\} \qquad Q(\tau > T) = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$= 92.386\,€$$

(ii) $Q(\tau > T) = e^{-\lambda T} = 0.92 \qquad T = 1$ anno

$$-\lambda = \ln(0.92) \qquad \lambda = -\ln(0.92) = 0.083$$