Scritto del 21 dicembre 2018
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2018/19
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1. Sia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ il prezzo di un'azione nel modello Black & Scholes con tasso di rendimento atteso μ, volatiltá $\sigma > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente e $p = p(T, S_0, K, \sigma) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$, il prezzo di una put al tempo $t = 0$ di maturitá T, prezzo d'esercizio K, scritta su $\{S_t\}_{t\geq 0}$.

(i) Mostrare che il prezzo della put é una funzione crescente e convessa del prezzo di esercizio K.
(**Suggerimento:** utilizzare che $S_0\Phi'(-d_1) = Ke^{-rT}\Phi'(-d_2)$)
(ii) Che relazione c'é tra il prezzo di una put $p(t, K)$ con prezzo di esercizio $K = aK_1 + (1-a)K_2$, con $a \in (0, 1)$ e i prezzi delle put $p(t, K_1)$ e $p(t, K_2)$ con prezzi di esercizio K_1 e K_2 rispettivamente, scritte sullo stesso sottostante e stessa maturitá?

2. Si consideri un mercato finanziario con due titoli rischiosi i cui prezzi $\{S^1_t\}_{t\geq 0}$ e $\{S^2_t\}_{t\geq 0}$ sono soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW^1_t) \quad S^1_0 > 0$$
$$dS^2_t = S^2_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani indipendenti.Sia $r > 0$ tasso d'interesse istantaneo privo di rischio.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo.
(ii) Il mercato finanziario é completo? (Giustificare la risposta)
(iii) Siano $\widetilde{S}^i_t = e^{-rt}S^i_t$, $i = 1, 2$ i prezzi scontati dei titoli. Sia $h_t = (\alpha^1_t, \alpha^2_t, \beta_t)$ una strategia autofinanziante, di valore $V^h_t = \alpha^1_t S^1_t + \alpha^2_t S^2_t + \beta_t e^{rt}$ e $\widetilde{V}^h_t = e^{-rt}V^h_t$. Mostrare che

$$d\widetilde{V}^h_t = \alpha^1_t d\widetilde{S}^1_t + \alpha^2_t d\widetilde{S}^2_t.$$

3.
Siano $\{S^1_t\}_{t\geq 0}$ e $\{S^2_t\}_{t\geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS^1_t = S^1_t(rdt + \sigma_1 dW^1_t), \quad S^1_0 > 0.$$

$$dS^2_t = S^2_t(rdt + \sigma_2 dW^2_t), \quad S^2_0 > 0.$$

con $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ costanti e $\{W^i_t\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.
(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)}E[\sqrt{S^1_T}(S^2_T)^2 | S^1_t = x_1, S^2_t = x_2]$$

(**Suggerimento:** scrivere $W^2_t = \rho W^1_t + \sqrt{1-\rho^2}B_t$ con $\{B_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W^1_t\}_{t\geq 0}$).
(ii) Un investitore ha venduto 1000 derivati europei di payoff finale $F(S^1_t S^2_T) = \sqrt{S^1_T}(S^2_T)^2$, determinare il delta del portafoglio di copertura investendo nelle azioni S^1 ed S^2. Quante azioni S^1 ed S^2 deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio, se $S^1_0 = 30\$$, $S^2_0 = 20\$$, $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 25\%$, $T = 12$ mesi, $\rho = 0.6$ e $r = 2\%$?