Scritto del 20 settembre 2018
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2017/18
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ con Q misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria. Si assuma hazard rate deterministico γ_t^Q e tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Determinare l'espressione del prezzo al tempo $t \in [0, T]$, $p_1(t, T)$, di un DZCB (senza recovery) di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Sia oggi ($t = 0$) il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 60$ euro e quello di un DZCB (senza recovery) di stesso valore nominale e maturitá pari a $p_1 = 15$ euro. Fornire una stima $\overline{\gamma}^Q$ dell'hazard rate medio su 3 anni.
(iii) Utilizzando il valore di $\overline{\gamma}^Q$ calcolato al punto (iii), ipotizzando che tra un anno non si sia verificato il default, determinare il prezzo al tempo $t = 1$ anno del DZCB.

2. Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotato di una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3$, i prezzi di tre azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{14} dW_t^4) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2 + \sigma_{23} dW_t^3), \quad S_0^2 > 0.$$

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{34} dW_t^4) \quad S_0^3 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2, 3$ e $\sigma_{ij} > 0$, costanti, $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, moti browniani indipendenti.
Considerare un mercato finanziario costituito da i tre titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)
(iii) E' possibile aggiungere un quarto titolo negoziato sul mercato in modo da rendere completo il mercato?

3. Siano $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(r dt + \sigma_1 dW_t^1), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(r dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ costanti e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.
(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E[S_T^1 S_T^2 | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2]$$

(**Suggerimento:** scrivere $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_t$ con $\{B_t\}_{t \geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$).

(ii) (Esercizio facoltativo) Applicare la formula di Ito per determinare l'equazione differenziale stocastica (EDS) seguita dal processo $\{Y_t\}_{t \geq 0} = \{S_t^1 S_t^2\}_{t \geq 0}$.